

Musterlösung 9

1. a) Die Verteilung von (X, Y) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}P[X = 0, Y = 0] &= p, \\P[X = 0, Y = 1] &= P[X = 0] - P[X = 0, Y = 0] = 1/2 - p, \\P[X = 1, Y = 0] &= P[Y = 0] - P[X = 0, Y = 0] = 1/3 - p, \\P[X = 1, Y = 1] &= 1 - P[X = 0, Y = 0] - P[X = 0, Y = 1] - P[X = 1, Y = 0] \\&= 1/6 + p.\end{aligned}$$

Da die obigen Ausdrücke Wahrscheinlichkeiten sind, müssen ihre Wert zwischen 0 und 1 liegen. Folglich darf p nur Werte zwischen 0 und $1/3$ annehmen. Andererseits, falls $p \in [0, 1/3]$, dann sind $\sum_{\omega} P[\{\omega\}] = 1$ und $P[\{\omega\}] \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt.

Die Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn für alle $i, j = 0, 1$

$$P[X = i, Y = j] = P[X = i] \cdot P[Y = j]$$

erfüllt ist. Also genau dann, wenn $p = 1/6$ ist.

- b)

$$\begin{aligned}E[X] &= 0 \cdot P[X = 0] + 1 \cdot P[X = 1] = 1 - 1/2 = 1/2, \\E[Y] &= 0 \cdot P[Y = 0] + 1 \cdot P[Y = 1] = 1 - 1/3 = 2/3, \\E[XY] &= 0 \cdot P[XY = 0] + 1 \cdot P[XY = 1] = P[X = 1, Y = 1] = 1/6 + p.\end{aligned}$$

Da X und Y nur die Werte 0 oder 1 annehmen, gilt $X^2 = X$ und $Y^2 = Y$. Somit hat man

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E[X^2] - E[X]^2 = 1/4, \\ \sigma_Y^2 &= E[Y^2] - E[Y]^2 = 2/9.\end{aligned}$$

$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$ gilt hier genau dann, wenn $p = 1/6$ erfüllt ist (also genau dann, wenn X und Y unabhängig sind).

- c) Ein einfaches Beispiel ist das Folgende: Sei U eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $-1, 0, 1$ je mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ annimmt. Setze dann $V := U^2$. Intuitiv sind U und V nicht unabhängig. Formal sieht man, dass

$$P[U = 1, V = 1] = P[U = 1, U^2 = 1] = P[U = 1] = \frac{1}{3} \neq P[U = 1]P[V = 1].$$

Also sind U und V effektiv nicht unabhängig. Wie man leicht zeigt, gilt jedoch $E[UV] = E[U]E[V]$, denn offenbar ist $E[U^3] = E[U]$ und $E[U] = 0$.

Bitte wenden!

2. a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$. Für $y = 1$ erhalten wir

$$(1 + x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k &= (1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} x^{k+j} \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^n \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} \right) x^k = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} \right) x^k, \end{aligned}$$

wobei wir für $j > n$, $\binom{n}{j} = 0$ setzen. Einen Koeffizientenvergleich liefert die Gleichung $\sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$.

BEMERKUNG: Die Gleichung wird Identität von Vandermonde genannt. Man kann die Gleichung auch kombinatorisch zeigen: wir betrachten $m + n$ Objekte und unterteilen sie in zwei Gruppen der Grössen m und n . Für $k \geq 1$ gibt es $\binom{m+n}{k}$ Möglichkeiten, k Objekte aus den $m + n$ Objekten zu wählen. Von den k Objekten sind j davon aus der Gruppe mit n Objekten und $k - j$ davon aus der Gruppe mit m Objekten. Die Anzahl Möglichkeiten k Objekte auf diese Weise aus den beiden Gruppen zu wählen, beträgt $\binom{m}{k-j} \binom{n}{j}$. Summieren wir über alle möglichen Werte von j , erhalten wir die gewünschte Identität.

b) Weil die Mengen $\{Y = j\}$ für $j \in \mathbb{N}$ disjunkt sind, gilt für $k \leq m + n$,

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X + Y = k, Y = j) \\ &\stackrel{\substack{\{Y+X=k, Y=j\}=\emptyset \\ \text{für } j > k}}{=}}{\sum_{j=0}^k} P(X = k - j, Y = j) \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-k+j} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} p^k (1-p)^{m+n-k} \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}. \end{aligned}$$

Also ist $X + Y$ wieder binomial verteilt mit Parameter $(m + n, p)$.

Siehe nächstes Blatt!

BEMERKUNG: Intuitiv folgt das Resultat aus folgender Überlegung: wir schreiben X als Summe $X = X_1 + \dots + X_m$, wobei die Summanden X_i unabhängig Bernoulli verteilt sind mit Parameter p . Ebenso schreiben wir Y als Summe $Y = Y_1 + \dots + Y_n$, wobei die Summanden Y_i ebenfalls unabhängig Bernoulli verteilt sind mit Parameter p . Weil X und Y unabhängig sind, sind auch die Summanden X_i und Y_j alle unabhängig. Daher ist $X + Y = X_1 + \dots + X_m + Y_1 + \dots + Y_n$ wieder binomial verteilt mit Parametern $(m + n, p)$.

- c) Man sieht leicht, dass X' und Y' beide binomial verteilt sind mit Parametern $(n, 1/2)$. Natürlich gilt auch $X' + Y' = n$. Also ist $X' + Y'$ konstant und hat die Verteilung

$$P[X' + Y' = k] = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies widerspricht dem Resultat aus **b) nicht**, da X' und Y' nicht unabhängig sind.

3. a) Für $k \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} P[X + Y = k] &= \sum_{j=0}^k P[X = k - j, Y = j] \stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{j=0}^k P[X = k - j] P[Y = j] \\ &= \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \mu^j \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}, \end{aligned}$$

d.h. $X + Y$ ist Poisson verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$. Analog findet man, dass $X + Z$ Poisson verteilt ist mit Parameter $\lambda + 2\mu$.

BEMERKUNG: Allgemein gilt für zwei unabhängige Poisson verteilte Zufallsvariablen X und Y mit respektiven Parametern λ und μ , dass $X + Y$ wieder Poisson verteilt ist mit Parameter $\lambda + \mu$.

- b) Definiere das Ereignis $D = \{\text{Chip enthält Komponente } B\}$. Dann gilt mit dem Satz von Bayes

$$\begin{aligned} P[D|N = n] &= \frac{P[N = n|D] P[D]}{P[N = n|D] P[D] + P[N = n|D^c] P[D^c]} \\ &= \frac{P[X + Y = n] \cdot \frac{1}{2}}{P[X + Y = n] \cdot \frac{1}{2} + P[X + Z = n] \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\mu} \left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}. \end{aligned}$$

- c) Es gilt $N = N1_D + N1_{D^c}$ und daher, wegen der Unabhängigkeit von N und D ,

$$\begin{aligned} E[N] &= E[N1_D] + E[N1_{D^c}] = E[X + Y]P[D] + E[X + Z]P[D^c] \\ &= E[X + Y] \cdot \frac{1}{2} + E[X + Z] \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\lambda + \mu + \lambda + 2\mu) = \lambda + \frac{3}{2} \mu. \end{aligned}$$